Primjer 2. Naći rješenja Košijevih zadataka:

a) $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$, $z\big|_{x=0}=y^2$, b) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2$, $z\big|_{y=1}=x^2$.

a) Napišimo sistem karakteristika: $\dfrac{dx}{y^2}=\dfrac{dy}{xy}=\dfrac{dz}{x}$. Iz $\dfrac{dx}{y^2}=\dfrac{dy}{xy}$ slijedi da je $xdx-ydy=0$, odnosno $x^2-y^2=C_1$ (prvi integral). Iz $\dfrac{dy}{xy}=\dfrac{dz}{x}$ slijedi $\dfrac{dy}{y}=dz$, odnosno $\ln y-z=C_2$ (prvi integral). Dalje je $-y^2=\overline{C_1}$ i $\ln y-z=\overline{C_2}$, odnosno $y=\sqrt{-\overline{C_1}}$ i $z=\dfrac{1}{2}\ln\left(-\overline{C_1}\right)-\overline{C_2}$. Rješenje datog Kz je $\dfrac{1}{2}\ln(-C_1)-C_2=-C_1$, odnosno $\ln\sqrt{y^2-x^2}-\ln y+z=y^2-x^2$, tj. funkcija $z=-\ln\sqrt{y^2-x^2}+\ln y+y^2-x^2$.

b) Ovdje je sistem karakteristika: $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{-2y}=\dfrac{dz}{x^2+y^2}$. Iz $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{-2y}$ slijedi $\dfrac{2dx}{x}=-\dfrac{dy}{y}$, odnosno $x^2y=C_1$ (prvi integral). Iz $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{-2y}=\dfrac{dz}{x^2+y^2}$ slijedi da je

$$\frac{xdx+\frac{1}{2}ydy}{x^2+y^2}=\frac{dz}{x^2+y^2},$$

odnosno $xdx+\dfrac{1}{2}ydy-dz=0$, tj. $2xdx+ydy-2dz=0$. Dalje je $x^2+\dfrac{1}{2}y^2-2z=\dfrac{C_2}{2}$, tj. $2x^2+y^2-4z=C_2$ (prvi integral). Iz $x^2=\overline{C_1}$ i $2x^2+1-4z=\overline{C_2}$ dobijamo da je $x=\sqrt{\overline{C_1}}$ i $z=\dfrac{1}{4}\left(2\overline{C_1}+1-\overline{C_2}\right)$. Rješenje je dato formulom $\dfrac{1}{4}(2C_1+1-C_2)=C_1$, odnosno $2x^2(y+1)-y^2-4z+1=0$, tj. $z=\dfrac{1}{4}\left(2x^2(y+1)-y^2+1\right)$.